LEKCIJE IZ MATEMATIKE 1

Ivica Gusić

Lekcija 11

Pojam derivacije, geometrijsko i fizikalno značenje

Lekcije iz Matematike 1.

11. Pojam derivacije, geometrijsko i fizikalno značenje

I. Naslov i objašnjenje naslova

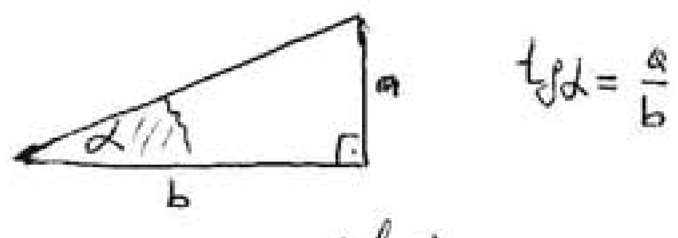
U lekciji se uvodi pojam prirasta funkcije, brzine prirasta, derivacije funkcije i veze s tangentom grafa funkcije te brzinom čestice koja se giba po pravcu. Upućuje se na važnost pojma derivacije u inženjerstvu.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Problem opisa brzine neke reakcije, ili, općenito, brzine promjene jedne veličine s obzirom na promjenu druge veličine, jedan je od temeljnih inženjerskih problema. Taj problem analogan je problemu opisa brzine čestice koja se giba po pravcu. Geometrijski, taj je problem analogan problemu odredjivanja tangente na graf funkcije. Svi se ti problemi matematički rješavaju pomoću pojma derivacije funkcije.
Nadalje, pomoću derivacije se opisuje promjena brzine reakcije (ubrzanje, usporenje i sl.) te djelomice analogni geometrijski pojmovi (konveksnost, konkavnost i sl.).

III. Potrebno predznanje

Intuitivna predožba brzine, posebice brzine čestice koja se giba po pravcu te tangente na krivulju usvaja se već od 7. razreda osnovne škole (pa i odranije). Na tim predožbama uvest ćemo matematički pojam brzine i derivacije funkcije. Za usvajanje pojma derivacije potrebno je i predznanje o osnovnim elementarnim funkcijama.
Takodjer potrebno je znati definiciju tangensa kuta (sl.1.).



sl.1.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Pojam prirasta neke veličine, prirasta argumenta funkcije i prirasta funkcije

I. Prirast veličine. Vrijednosti neke veličine u pravilu se mijenjaju (ukoliko veličina nije konstantna). Ako uočimo dvije vrijednosti: x_1, x_2 neke veličine x, onda se razlika $x_2 - x_1$ zove **prirast** veličine x. Vidimo da smo tu x_1 shvatili kao prvu vrijednost (možemo zamisliti da smo je dobili pri prvom mjerenju veličine x, odnosno da je ona, prema nekom načelu prva), a x_2 kao drugu (možemo zamisliti da smo je dobili pri drugom mjerenju veličine x, odnosno da je ona, prema nekom načelu druga). To pišemo i kao

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Vidimo da Δx označava koliko se promijenila veličina x. Ta se relacija može zapisati i ovako:

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

što se može zamišljati kao da se nova vrijednost veličine dobije tako da se staroj vrijednosti doda prirast.

Primjer 1. Tablicom su predočene neke izmjerene vrijednosti veličine x i pripadni prirasti za uzastopne vrijednosti.

II. Prirast funkcije. Uz svaku funkciju povezane su dvije veličine:
1. veličina - **argument funkcije** ili **nezavisna varijabla**, obično se označava kao x
2. veličina - **zavisna varijabla**, to je veličina vrijednosti funkcije, obično se označava kao y.

Na primjer za funkciju $f(x) := x^2$, argument (nezavisna varijabla) je x i ona može imati bilo koju realnu vrijednost;
zavisna varijabla y povezana je s x vezom $y = x^2$ i ona postiže svaku realnu vrijednost koja je veća ili jednaka nuli.

Prirast argumenta je **bilo koja** vrijednost $\Delta x = x_2 - x_1$, gdje su x_1, x_2 dvije izabrane vrijednosti veličine x. Preciznije:
Δx je prirast veličine x kad se ona promijeni od $x = x_1$ do $x = x_2$.

Prirast funkcije u x_1 uvijek je povezan s pripadnim prirastom argumenta, označava se kao $\Delta f(x)|_{x=x_1}$ i definira kao:

$$\Delta f(x)|_{x=x_1} := f(x_2) - f(x_1)$$

To je prirast funkcije f kad se argument x promijeni od $x = x_1$ do $x = x_2$.
Oznaka $\Delta f(x)|_{x=x_1}$ obično se pijednstavnije kao $\Delta f(x)$.

Primjer 2. Odredimo prirast funkcije $f(x) := x^2$
(i) kad se x promijeni od $x = 1$ do $x = 2$

(ii) kad se x promijeni od $x = 10$ do $x = 11$
(iii) kad se x promijeni od $x = 100$ do $x = 101$
.

(i) $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1) = f(2) - f(1) = 2^2 - 1^2 = 3$
(ii) $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1) = f(11) - f(10) = 11^2 - 10^2 = 21$
(iii) $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1) = f(101) - f(100) = 101^2 - 100^2 = 201$

Prirast funkcije često se shvaća i zapisuje kao prirast zavisne varijable y. Dakle:
$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = \Delta f(x)$

Treba usvojiti i ovu terminologiju:
x_0 neka početna vrijednost argumenta.
Δx prirast argumenta u x_0
$x_0 + \Delta x$ nova vrijednost argumenta.
$\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$ prirast funkcije f u x_0 za prirast argumenta Δx (moze se pisati i Δy umjesto $\Delta f(x)$, ako razmatramo veličinu y koja je s veličinom x popvezana vezom $y = f(x)$).

Takodjer, umjesto konkretne vrijednosti x_0, često se piše x, pa oznake ostaju iste osim što se svugdje x_0 zamijeni s x. Na primjer:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Primjer 3. Zapišimo prirast kvadratne funkcije u x.

Tu je $f(x) := x^2$. Zato je prirast u x

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2$$

Nakon računanja dobije se

$$\Delta f(x) = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

To se može pisati kao:

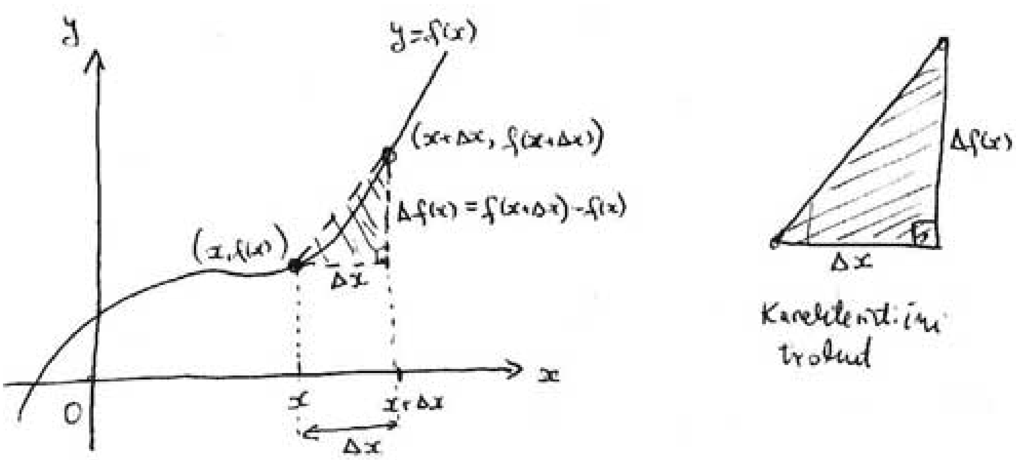
$$\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

(gdje je y veličina povezana s x vezom $y = x^2$.

Vidimo da je prirast funkcije ovisan o početnoj vrijednosti argumenta (općenito x) i prirastu argumenta (općenito Δx).

Geometrijska predodžba prirasta funkcije i prirasta argumenta.

Na grafu funkcije prirast funkcije i prirast argumenta (ako su oba pozitivna) mogu se predočiti kao **katete karakterističnog pravokutnog trokuta** (sl.2).



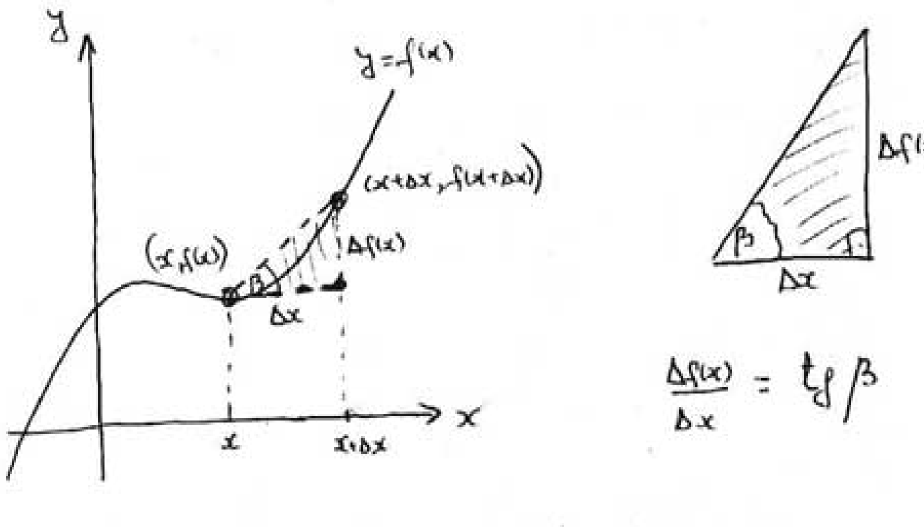
Sl. 2

Relativni prirast, prosječna brzina promjene

U Primjeru 2 stalno je bilo $\Delta x = 1$ dok je početna vrijednost bila, redom, $x = 1$, $x = 10$, $x = 11$. Vidimo da za iste promjene argumenta imamo različite promjene funkcije, ovisno o početnoj vrijednosti.
Općenito, **relativni prirast** funkcije s obzirom na promjenu argumenta je omjer prirasta funkcije i prirasta argumenta:

Relativni prirast := $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

Geometrijska predodžba relativnog prirasta - tangens kuta karakterističnog trokuta (sl.3).



Sl. 3.

Vidimo da se relativni prirast definira poput prosječne (srednje) brzine, zato se naziva i **prosječna brzina promjene funkcije**.
Dakle, relativni prirast $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ je prosječni promjena vrijednosti funkcije na jedinicu promjene argumenta. Naime:

Promjena argumenta Δx ...... Promjena funkcije $\Delta f(x)$
Promjena argumenta jedinična..... Promjena funkcije $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

Primjer 4. Odredimo relativni prirast (prosječnu brzinu promjene) kvadratne funkcije.

Iz Primjera 3. dobijemo:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

(u posljednjoj smo jednakosti predpostavili da je $\Delta x \neq 0$, što je prirodno i od sad ćemo uvijek smatrati da je $\Delta x \neq 0$).

Vidimo da za $f(x) := x^2$ vrijedi:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx 2x, \text{ ako je } \Delta x \approx 0$$

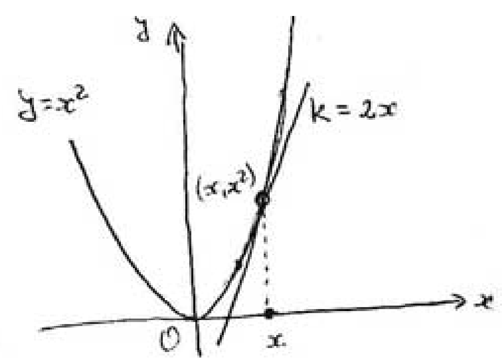
i da je ova približna jednakost to točnija što je prirast manji.

Brzina promjene, derivacija funkcije u točki.

Razmotrimo prosječnu brzinu promjene kvadratne funkcije $f(x) = x^2$, za fiksiranu početnu vrijednost x, a za sve manje priraste Δx, koji se približavaju prema nuli. Vidimo da se ta vrijednost približava prema $2x$, što pišemo kao:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)) = 2x$$

(čitamo: *limes kad delta iks ide u nulu od ...*) Geometrijski, to znači da je koeficijent smjera tangente na graf parabole $y = x^2$ u točki (x, x^2) jednak $2x$ (sl.4).

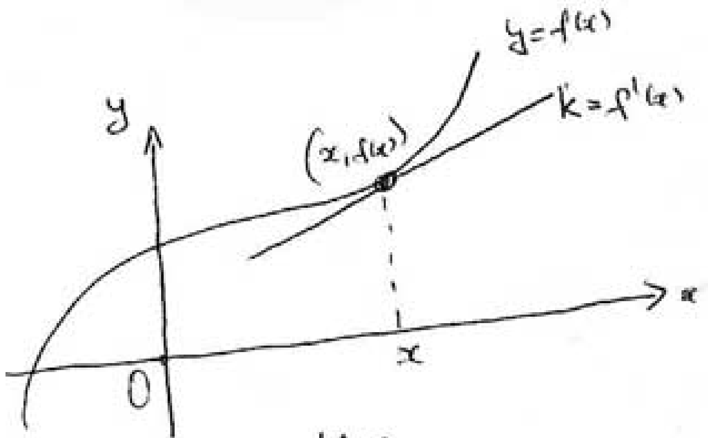


Sl. 4

Vrijednost $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ zove **derivacija** funkcije f u x, označava se kao $f'(x)$, a značenje joj je brzina promjene funkcije f u x. Dakle:

$$f'(x) := \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

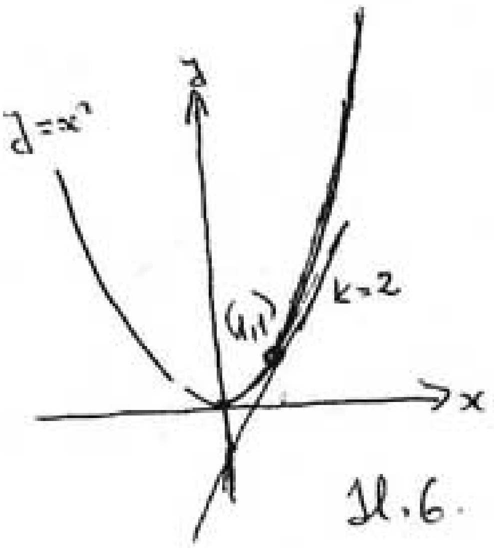
Geometrijsko značenje derivacije funkcije u točki je koeficijent smjera tangente na graf funkcije (sl.5).



Sl.5.

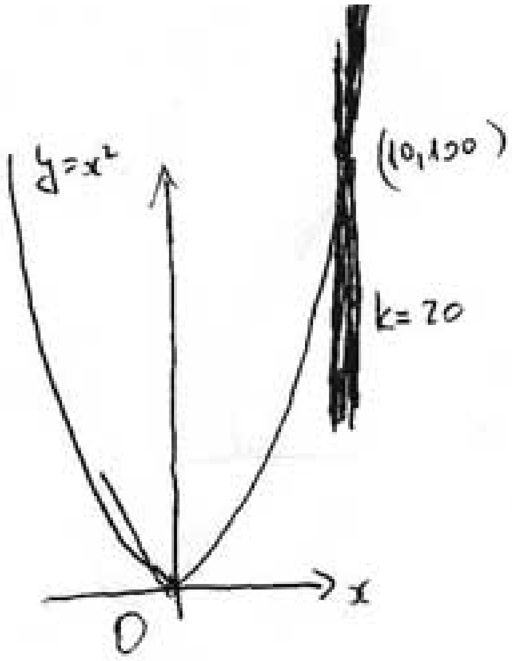
Primjer 5. Odredimo brzinu promjene i interpretirajmo je geometrijski, za funkciju $f(x) := x^2$ redom u $x = 1, 10, 100$.

$f'(1) = 2\cdot 1 = 2$. Geometrijski, to znači da je $k = 2$ koeficijent smjera tangente na graf funkcije f, tj. na parabolu $y = x^2$ u točki $(1, f(1))$, tj. u točki $(1, 1)$ (sl.6.).



Sl.6.

$f'(10) = 2 \cdot 10 = 20$. Geometrijski, to znači da je $k = 20$ koeficijent smjera tangente na graf funkcije f, tj. na parabolu $y = x^2$ u točki $(10, f(10))$, tj. u točki $(10, 100)$ (sl.7.).



sl.7.

$f'(100) = 2 \cdot 100 = 200$. Geometrijski, to znači da je $k = 200$ koeficijent smjera tangente na graf funkcije f, tj. na parabolu $y = x^2$ u točki $(100, f(100))$, tj. u točki $(100, 10000)$, što nije lako predočiti.

Definicija derivacije funkcije u točki

Često, u definiciji derivacije umjesto x pišemo x_0 da bismo naglasili da se derivacija računa u konkretnom broju (konkretnoj točki). Takav je pristup, vidjet ćemo, potreban, kad želimo napisati jednadžbu tangente na graf.

Neka je f funkcija definirana oko točke (broja) x_0). Derivacija funkcije f u x_0 je broj

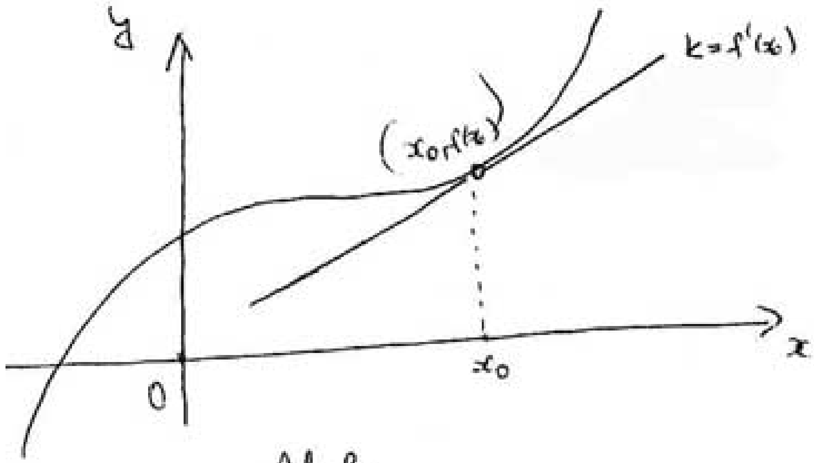
$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Analiza izraza za derivaciju funkcije u točki

U tom se izrazu lijeva strana definira pomoću desne. Na desnoj strani x_0 je stalan (fiksiran), a Δx se mijenja (teži prema nuli). Finalni izraz ne ovisi o Δx već samo o x_0 i funkciji f, upravo kao i lijeva strana.

Precizna formulacija geometrijskog značenja derivacije funkcije u točki

Derivacija funkcije f u x_0 je koeficijent smjera tangente na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ (sl.8.).

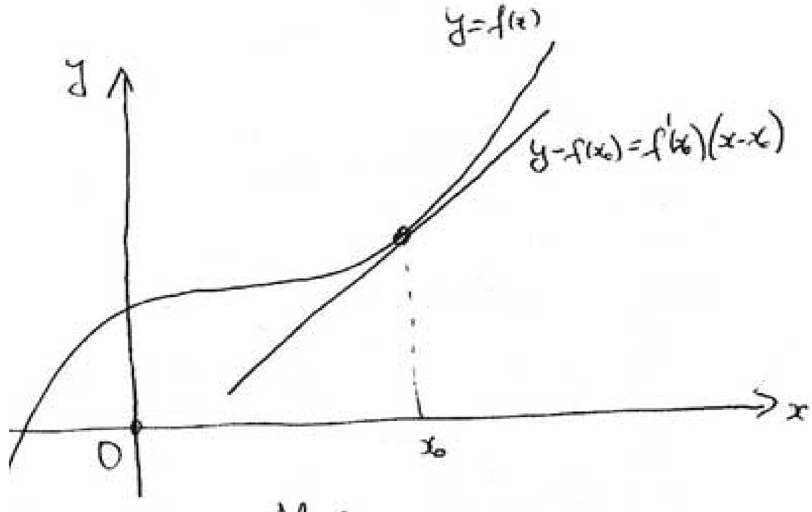


Sl. 8.

Uočite da se tu riječ *točka* spominje dvaput: prvi put to znači broj, a drugi put to je zaista točka u ravnini (uredjeni par).

Precizna formulacija fizikalnog značenja derivacije funkcije u točki
Derivacija funkcije f u x_0 je brzina promjene funkcije f u x_0
Uočite da je brzina tu uvedeni apstraktni pojam kao granična vrijednost (limes) srednjih brzina kad prirast teži nuli (to je definicija brzine u zadanom trenutku i nju ne možemo mjeriti).

Jednadžba tangente na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ (sl.9).



Sl. 9.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Vidimo da bi tu nastala zbrka da smo točku grafa označili kao (x, y) jer su x, y potrebne kao oznake u jednadžbi tangente.

Primjer 6. Odredimo jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) := x^2$ u točki:
(a) $(1, 1)$, b) $(10, 100)$, c) $(100, 10000)$

Koristimo Primjer 5.
(a) Tu je $x_0 = 1$, $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = 2$, pa je jednadžba tangente:

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

(b)

$$y - 100 = 20(x - 10)$$

(c)

$$y - 10000 = 200(x - 100)$$

Definicija derivacije funkcije
Derivacija funkcije f je funkcija f' kojoj je vrijednost u svakoj točki jednaka derivaciji funkcije f u toj točki.

Uočite da smo tu rekli samo *derivacija funkcije*, a da smo u prijašnjoj rekli *derivacija funkcije u točki*; Dakle,
Derivacija funkcije je nova funkcija, a
Derivacija funkcije u točki je broj.

Primjer 7. Odredimo derivaciju funkcije $f(x) := x^2$

To je funkcija $f'(x) := 2x$.

Izraz za derivaciju funkcije
Dobije se da se u izrazu za derivaciju funkcije u točki, umjesto x_0 uvrsti x; dakle:

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$